الحساب المثلثي

I- تذكير

وحدات قياس الزوايا لقياس الزوايا هناك ثلاث وحدات هي الدرجة و الغراد و الراديان.

تعريف الراديان الراديان هو قياس زاوية مركزية، في دائرة شعاعها R ، تحصر قوسا دائرية طولها R .
نرمز لها بـ rd

ملاحظة $\pi rd = 200gr = 180°$ (gr : يرمز للغراد)

نتيجة إذا كان x قياس زاوية بالراديان و y قياسها بالدرجة و z قياسها بالغراد فان $\frac{x}{\pi} = \frac{y}{180} = \frac{z}{200}$

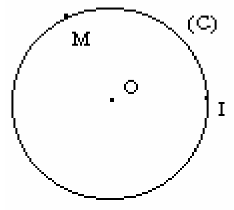
قياس قوس هندسية قياس قوس هندسية هو قياس الزاوية المركزية التي تحصره.

طول قوس هندسية
إذا كان α قياس قوس هندسية بالراديان، في دائرة شعاعها R ، فان طول هذه القوس هو αR.

ملاحظة طول قوس هندسية، في دائرة شعاعها 1 هو قياس هذه القوس.

II- الدائرة المثلثية – الأفصول المنحني – الزوايا الموجهة.

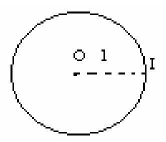
1- توجيه مستوى



لتكن (C) دائرة و I نقطة من هذه الدائرة .

لو أردنا أن ننطلق من I لندور حول (C) ، لوجدنا أنفسنا أمام منحيين .

توجيه الدائرة (C) هو اختيار أحد المنحيين منحى موجبا (أو مباشرا)
و الآخر منحى سالبا (أو غير مباشر).
عادة نأخذ المنحى الموجب المنحى المعاكس لحركة عقارب الساعة .
النقطة I تسمى أصل الدائرة (C).



عندما توجه جميع دوائر المستوى توجيها موحدا فإننا نقول إن المستوى موجه.

2- الدائرة المثلثة

تعريف الدائرة المثلثية هي دائرة شعاعها1 مزودة بنقطة أصل و موجهة توجيها موجبا.

3- الأفصول المنحني لنقطة على الدائرة المثلثة

أ- تعريف

نعتبر دائرة مثلثية (C) أصلها I. و لتكن M نقطة من (C)

ليكن α طول القوس الذي طرفاه I و M بالذهاب من I إلى M في المنحى الموجب
$(\widehat{IOM} = \alpha \quad ; \quad 0 \le \alpha \prec 2\pi)$

الحالة 1

إذا أردنا الذهاب من I إلى M على (C) في المنحى الموجب فإننا سنصل إلى M للمرة الأولى عند قطع مسار طوله α وإذا تابعنا التحرك فإننا سنصل إلى M للمرة الثانية عند قطع مسار طوله $\alpha + 2\pi$ (لأن محيط الدائرة هو 2π) و في المرة الثالثة فإننا سنصل إلى M عند قطع مسار طوله $\alpha + 2(2\pi) = \alpha + 4\pi$ .... وفي المرة $k+1$ $(k \in \mathbb{N})$ سنصل إلى M عند قطع مسار طوله $\alpha + 2k\pi$.

الحالة 2

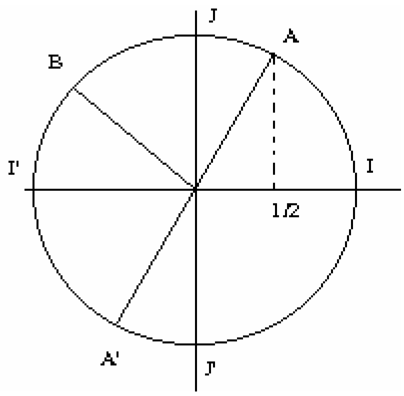
إذا أردنا الذهاب من I إلى M على (C) في المنحى السالب فإننا سنصل إلى M للمرة الأولى عند قطع مسار طوله $2\pi - \alpha$ وإذا تابعنا التحرك فإننا سنصل إلى M للمرة الثانية عند قطع مسار طوله $4\pi - \alpha$........ وفي المرة k' $(k' \in \mathbb{N}^*)$ سنصل إلى M عند قطع مسار طوله $-\alpha + 2k'\pi$.

لكي نميز بين هاتين الحالتين للتنقل من I إلى M ، نقول إننا قطعنا مسارا طوله (أو قياسه) $\alpha + 2k\pi$
في الحالة الأولى, ومسارا طوله $-(-\alpha + 2k'\pi)$ أي $\alpha - 2(-k')\pi$ في الحالة الثانية .
و في كلتا الحالتين فان قياس المسار للذهاب من I إلى M هو $\alpha + 2\lambda\pi \quad \lambda \in \mathbb{Z}$.

تعريف

لتكن M نقطة من دائرة مثلثية (C) أصلها I.
و ليكن α طول القوس الذي طرفاه I و M بالذهاب من I إلى M في المنحنى الموجب.
كل عدد يكتب على الشكل $\alpha + 2k\pi$ بحيث k عنصر من $\mathbb{Z}$ يسمى أفصولا منحنيا للنقطة M.

تمرين
(C) دائرة مثلثية أصلها I . حدد الأفاصيل المنحنية للنقط
الممثلة في الشكل كمايلي B; A';A; J'; J; I';I

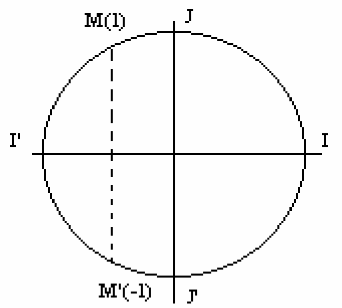


تمرين
(C) دائرة مثلثية أصلها I . نعتبر $\frac{34\pi}{3}$ أفصول منحني لنقطة M . أنشئ M

ب- خاصيات و تعريف
خاصية
- إذا كان x و y أفصولين منحنيين للنقطة M فانه يوجد عنصر λ من $\mathbb{Z}$ بحيث $x - y = 2\lambda\pi$
و نكتب $x \equiv y \quad [2\pi]$ و نقرأ x يساوي y بترديد 2π.
- إذا كان x أفصول منحني للنقطة M فان جميع الأفاصيل المنحنية للنقطة M تكتب على شكل $x + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

تعريف
يوجد أفصول منحني وحيد للنقطة M ينتمي إلى المجال $]-\pi;\pi]$ يسمى الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M.

ملاحظة
إذا رمزنا للأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M بالرمز α
و رمزنا لطول القوس $[\widehat{IM}]$ بالعدد الموجب l فان :
* $\alpha = l$ إذا كانت M تنتمي إلى نصف الدائرة $[\widehat{IJI'}]$
* $\alpha = -l$ إذا كانت M تنتمي إلى نصف الدائرة $[\widehat{IJ'I'}]$

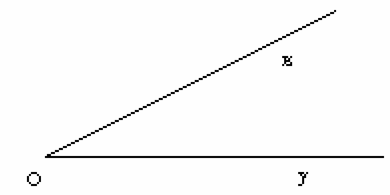


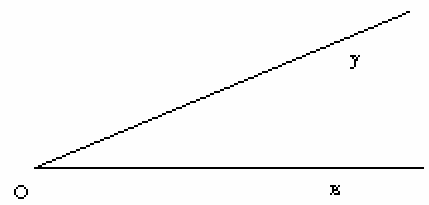
تمرين حدد الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة التي إحدى أفاصيلها المنحنية $\alpha = \frac{-227\pi}{6}$

تمرين مثل على الدائرة المثلثية النقط $C;B;A$ التي أفاصيلها المنحنية على التوالي هي
$7\pi \quad ; \quad \frac{37\pi}{3} \quad ; \quad \frac{-108\pi}{12}$

تمرين أنشئ على الدائرة المثلثية النقط M_k التي أفاصيلها المنحنية $-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

4- الزاوية الموجهة لنصفي مستقيم
أ- تعريف
ليكن $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم لهما نفس الأصل
الزوج $([O;x[;[O;y[)$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيم و يرمز لها بالرمز $(\widehat{Ox;Oy})$





تعريف وخاصة

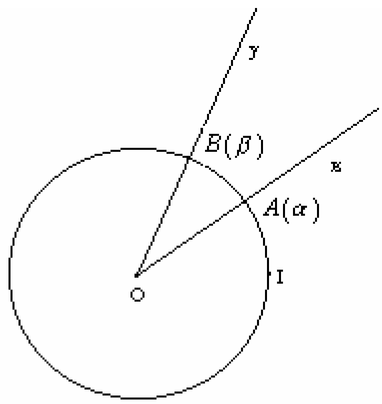
لتكن $(\widehat{Ox;Oy})$ زاوية موجهة لنصفي مستقيم ، و (C) دائرة مثلثية مركزها O ، A و B نقطتي تقاطع (C) و نصفي مستقيم $[O;x[$ و $[O;y[$ على التوالي

ليكن α و β أفصولين منحنيين للنقطتين A و B على التوالي .

كل عدد حقيقي يكتب على الشكل $\beta-\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ يسمى قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$.

نرمز لقياسات الزاوية $(\widehat{Ox;Oy})$ بالرمز $(\overline{Ox;Oy})$ نكتب $k\in\mathbb{Z}$ $(\overline{Ox;Oy})=\beta-\alpha+2k\pi$

و نكتب أيضا $[2\pi]$ $(\overline{Ox;Oy})\equiv\beta-\alpha$



خاصة و تعريف

لكل زاوية موجهة لنصفي مستقيم قياس وحيد ينتمي إلى المجال $]-\pi;\pi]$ يسمى القياس الرئيسي لهذه الزاوية الموجهة.

خاصة

إذا كان θ قياس للـزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$ فان $\theta+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ قياس للزاوية $(\widehat{Ox;Oy})$.

إذا كان α و β قياسين للزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$ فان 2π $\alpha-\beta\equiv 0$

أي $(k\in\mathbb{Z}/\quad \alpha-\beta=2k\pi)$

ملاحظات

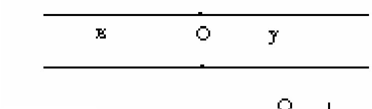
* إذا كانت M نقطة من دائرة مثلثية أصلها I و مركزها O فان الأفاصيل المنحنية للنقطة M هي قياسات الزاوية الموجهة $(\widehat{OI;OM})$

* القيمة المطلقة للقياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$ هي قياس الزاوية الهندسية $(\widehat{xOy})$.

بعض الزوايا الخاصة

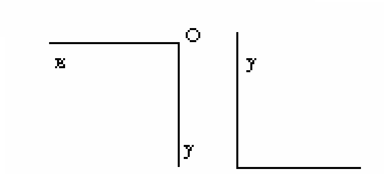
الزاوية المنعدمة $\left(\overline{Ox\,;Ox}\right)\equiv 0 \quad [2\pi]$

الزاوية المستقيمة $\left(\overline{Ox\,;Oy}\right)\equiv \pi \quad [2\pi]$ $\quad\left(\overline{Oy\,;Ox}\right)\equiv \pi \quad [2\pi]$



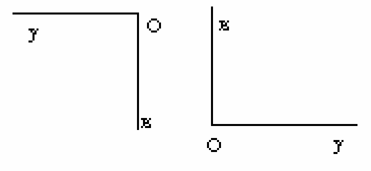
الزاوية القائمة - $\left(\overline{Ox\,;Oy}\right)\equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

الزاوية $\left(\widehat{Ox\,;Oy}\right)$ زاوية قائمة موجبة



- $\left(\overline{Ox\,;Oy}\right)\equiv -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

الزاوية $\left(\widehat{Ox\,;Oy}\right)$ زاوية قائمة سالبة.



تمرين 1- بين أن القياسات التالية تمثل قياسات نفس الزاوية $\dfrac{601\pi}{6}\ ;\ \dfrac{-143\pi}{6}\ ;\ \dfrac{25\pi}{6}$

2- ما هو القياس الرئيسي لزاوية موجهة قياسها أحد القياسات

$47\pi\ ;\ -36\pi\ ;\ \dfrac{52\pi}{5}\ ;\ -\dfrac{25\pi}{3}$

3- أنشئ زاوية موجهة $\left(\widehat{Ox\,;Oy}\right)$ قياسها $\dfrac{-234\pi}{5}$.

تمرين أنشئ ABC مثلث متساوي الأضلاع حيث $\left(\overline{AB\,;AC}\right)\equiv -\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

ج- علاقة شال ونتائجها

علاقة شال

إذا كانت $[O;x[$ و $[O;y[$ و $[O;z[$ ثلاثة أنصاف مستقيم لها نفس الأصل فان

$$\left(\overline{Ox\,;Oy}\right)+\left(\overline{Oy\,;Oz}\right)\equiv\left(\overline{Ox\,;Oz}\right) \quad [2\pi]$$

نتائج

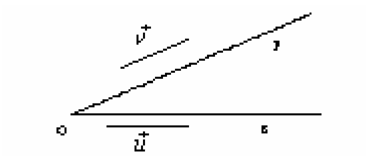
* اذا كان $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم فان $\left(\overline{Ox\,;Oy}\right)\equiv -\left(\overline{Oy\,;Ox}\right) \quad [2\pi]$

* اذا كان $[O;x[$ و $[O;y[$ و $[O;z[$ ثلاثة أنصاف مستقيم تحقق $\left(\overline{Ox\,;Oy}\right)\equiv\left(\overline{Ox\,;Oz}\right) \quad [2\pi]$

فان $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم منطبقان.

و هذا يعني أنه اذا كان $[Ox[$ نصف مستقيم و α عددا حقيقيا فانه يوجد نصف مستقيم وحيد

$[O;y[$ بحيث $\left(\overline{Ox\,;Oy}\right)\equiv \alpha \quad [2\pi]$.



د- زاوية زوج متجهتين غير منعدمتين

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من المستوى الموجه .

و $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم موجهين

على التوالي بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

زاوية زوج المتجهتين $\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ هي الزاوية الموجهة $\left(\widehat{Ox\,;Oy}\right)$ و يرمز لها بالرمز $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$.

مجموعة قياسات الزاوية $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ هي مجموعة قياسات الزاوية $\left(\widehat{Ox\,;Oy}\right)$. $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)\equiv\left(\overline{Ox\,;Oy}\right) \quad [2\pi]$

تمرين

لتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O و أصلها I. نعتبر على (C) النقط التالية المعرفة بأفاصيلها المنحنية $A(\pi)$ $B\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ $E\left(\frac{23\pi}{4}\right)$ $F\left(\frac{-17\pi}{3}\right)$

أعط قياسا لكل من الزاويا التالية ، ثم حدد القياس الرئيسي لكل منهن

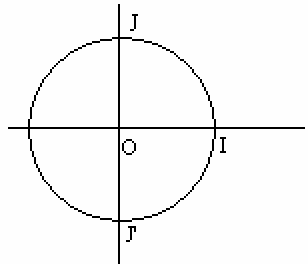
$\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF}}\right)$

5- المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بالدائرة المثلثة

لتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O و أصلها I . ولتكن J من (C) بحيث $\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}}\right)$ زاوية قائمة موجبة

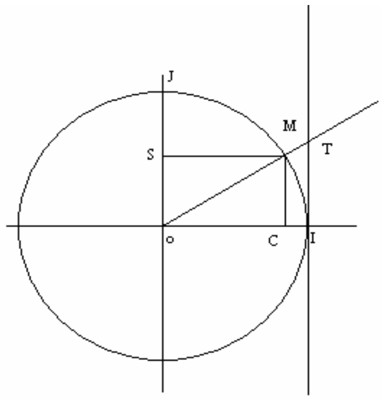
المعلم $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)$ يسمى المعلم المتعامد الممنظم المباشر المرتبط بالدائرة المثلثية (C).

لتكن J' من (C) بحيث $\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ'}}\right)$ زاوية قائمة سالبة .



المعلم $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ'}\right)$ يسمى المعلم المتعامد الممنظم الغير المباشر المرتبط بالدائرة المثلثية (C).

III- الدوال المثلثية



1- النسب المثلثية

تعاريف

لتكن (C) دائرة مثلثية و $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)$ المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بها. لتكن M نقطة من (C) و x أفصولا منحنيا لها . نعتبر C المسقط العمودي لـ M على (OI) و S المسقط العمودي لـ M على (OJ)

*- العدد الحقيقي $\overline{OC}$ أفصول النقطة M في المعلم $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)$ يسمى جيب تمام العدد الحقيقي x

نكتب $\cos x = \overline{OC}$

*- العدد الحقيقي $\overline{OS}$ أرتوب النقطة M في المعلم $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)$ يسمى جيب العدد الحقيقي x .

نكتب $\sin x = \overline{OS}$

*- ليكن Δ المماس لـ (C) عند I . لتكن T نقطة تقاطع (OM) و Δ أي $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

العدد الحقيقي $\overline{IT}$ هو ظل العدد الحقيقي x. نكتب $\tan x = \overline{IT}$

ملاحظة و اصطلاحات

- إذا كان x أفصول منحنى لنقطة M فان $M\left(\cos x ; \sin x\right)$
- الدالة $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\to\cos x\end{array}$ تسمى دالة جيب التمام حيز تعريفها $\mathbb{R}$ يرمز لها بـ $\cos$
- الدالة $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\to\sin x\end{array}$ تسمى دالة الجيب حيز تعريفها $\mathbb{R}$ يرمز لها بـ $\sin$
- الدالة $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\to\tan x\end{array}$ تسمى دالة الظل حيز تعريفها $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$ يرمز لها بـ $\tan$

2- خاصيات

*- $-1\leq\sin x\leq 1 \quad -1\leq\cos x\leq 1 \quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad \cos^2 x+\sin^2 x=1 \quad \forall x\in$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \qquad \forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$$

*- نعلم أن جميع الأعداد الحقيقية التي تكتب $x+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ، أفاصيل منحنية لنفس النقطة M

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \cos(x+2k\pi)=\cos x \quad ; \quad \sin(x+2k\pi)=\sin x$$

- مهما كانت $M\left(x+k\pi\right)$ لدينا $\tan x=\overline{IT}$

$$\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\} \qquad \tan(x+k\pi)=\tan x$$

حالة خاصة $\tan(x+\pi)=\tan x \qquad \forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

*- بتوظيف الدائرة المثلثية نحصل على

➢ $\sin(-x)=-\sin x \quad ; \quad \cos(-x)=\cos x \quad \forall x\in\mathbb{R}$ نعبرعن هذا بقولنا ان الدالة $\cos$ زوجية و أن الدالة $\sin$ فردية.

➢ $\tan(-x)=-\tan x \qquad \forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$ نعبرعن هذا بقولنا ان الدالة $\tan$ فردية.

➢ $cos(\pi-x)=-\cos x \quad ; \quad \sin(\pi-x)=\sin x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

➢ $cos(\pi+x)=-\cos x \quad ; \quad \sin(\pi+x)=-\sin x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

➢ $cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

➢ $cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

3 - نسب مثلثة اعتيادية

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tanx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

تمارين

تمرين1 أحسب $\sin\frac{-7\pi}{2}\ ;\sin\frac{53\pi}{6}\ ;\cos\frac{-37\pi}{4}\ ;\cos\frac{34\pi}{3}$

تمرين2 أ- حدد $1+\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{2\pi}{6}+....+\cos\frac{11\pi}{6}$

ب- بسط $\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)+\cos\left(\frac{27\pi}{2}-x\right)+\sin(3\pi+x)-\cos(7\pi-x)$

المعادلات و المتراجحات المثلثية

I- المعادلات المثلثية

1- المعادلة $\cos x=a$

مثال1 حل $\cos x=\frac{1}{2}$ $\quad x\in\mathbb{R}$

لدينا المستقيم $\Delta:\ x=\frac{1}{2}$ يقطع الدائرة المثلثية في نقطتين M و M' أفصوليهما المنحنيين الرئيسيين على التوالي هما $\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\pi}{3}$.

بما أن $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ بحيث $k\in\mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية للنقطة M و $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ بحيث $k\in\mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية للنقطة M' فإننا نستنتج أن

$$\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\quad\vee\quad x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\quad/k\in\mathbb{Z}$$

إذن $S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

مثال 2 حل $\cos x=\frac{1}{2}$ $\quad x\in[-2\pi;2\pi]$

نتبع نفس الخطوات السابقة فنحصل على

$$\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\quad\vee\quad x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\quad/k\in\mathbb{Z}$$

وحيث أننا نحل المعادلة في المجال $[-2\pi;2\pi]$ فان $-2\pi\le\frac{\pi}{3}+2k\pi\le 2\pi$ أو

$$-2\pi\le-\frac{\pi}{3}+2k\pi\le 2\pi$$

لدينا $-2\pi\le\frac{\pi}{3}+2k\pi\le 2\pi\Leftrightarrow-\frac{7}{6}\le k\le\frac{5}{6}\Leftrightarrow k\in\{-1;0\}$

ومنه $x=\frac{\pi}{3}\quad\vee\quad x=-\frac{5\pi}{3}$

لدينا $-2\pi\le-\frac{\pi}{3}+2k\pi\le 2\pi\Leftrightarrow-\frac{5}{6}\le k\le\frac{7}{6}\Leftrightarrow k\in\{1;0\}$

ومنه $x=-\frac{\pi}{3}\quad\vee\quad x=\frac{5\pi}{3}$

إذن $S=\left\{\frac{-5\pi}{3};\frac{-\pi}{3};\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right\}$

خلاصة المعادلة $\cos x = a$ لا تقبل حلا إذا كان $a \succ 1 \quad \vee \quad a \prec -1$

$\cos x = 1 \quad x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = -1 \quad x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$

إذا كان $-1 \prec a \prec 1$ فان يوجد عنصر α من $]0;\pi[$ حيث $\cos\alpha = a$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة $\cos x = a$ في $\mathbb{R}$ هي

$S = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

تمرين حل المعادلات

$\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad x \in]-\pi;3\pi] \qquad \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(2x) \quad x \in \mathbb{R}$

$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0 \quad x \in [\pi;2\pi[$

2- المعادلة $\sin x = a$

مثال1 حل $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad x \in \mathbb{R}$

لدينا المستقيم $\Delta: \; y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ يقطع الدائرة المثلثية في نقطتين M و M' أفصوليهما المنحنيين الرئيسيين على التوالي هما $\frac{\pi}{3}$ و $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

بما أن $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية للنقطة M و $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية للنقطة M' فإننا نستنتج أن

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$

إذن $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

مثال 2 حل $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad x \in [-2\pi;3\pi]$

نتبع نفس الخطوات السابقة فنحصل

على $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$

وحيث أننا نحل المعادلة في المجال $[-2\pi;3\pi]$ فان $-2\pi \le \frac{\pi}{3} + 2k\pi \le 3\pi$ أو

$-2\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \le 3\pi$

لدينا $-2\pi \le \frac{\pi}{3} + 2k\pi \le 3\pi \Leftrightarrow -\frac{7}{6} \le k \le \frac{8}{6} \Leftrightarrow k \in \{-1;0,1\}$

ومنه $x = \frac{7\pi}{3} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{3} \vee \quad x = -\frac{5\pi}{3}$

لدينا $-2\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \le 3\pi \Leftrightarrow -\frac{8}{6} \le k \le \frac{7}{6} \Leftrightarrow k \in \{-1;1;0\}$

ومنه $x = \frac{8\pi}{3} \quad \vee \quad x = \frac{2\pi}{3} \vee \quad x = \frac{-4\pi}{3}$

إذن $S = \left\{\frac{-5\pi}{3};\frac{-4\pi}{3};\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{7\pi}{3};\frac{8\pi}{3}\right\}$

خلاصة المعادلة $\sin x = a$ لا تقبل حلا إذا كان $a \succ 1 \quad \vee \quad a \prec -1$

$$\sin x = 1 \quad x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -1 \quad x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$

إذا كان $-1 \prec a \prec 1$ فان يوجد عنصر α من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ حيث $\sin\alpha = a$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة $\sin x = a$ في $\mathbb{R}$ هي

$$S = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

تمرين حل المعادلات $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(3x) \qquad x \in \mathbb{R}$

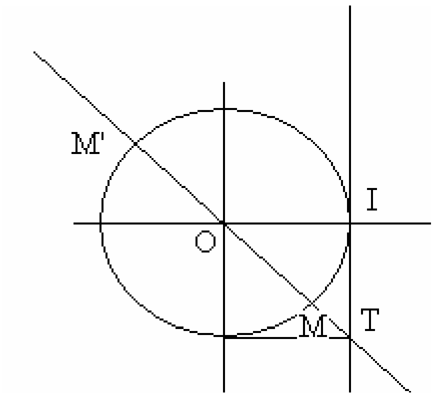
$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \qquad x \in]-\pi;3\pi]$$

$$4\sin^2 x - 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\sin x - \sqrt{6} = 0 \qquad x \in]-\pi;2\pi]$$

3- المعادلة $\tan x = a$

حل المعادلة $\tan x = -1 \quad x \in \mathbb{R}$

نعتبر Δ المماس الدائرة المثلثية (C) في أصلها I ، نأخذ النقطة T من Δ حيث $\overline{IT} = -1$



المستقيم (OT) يقطع الدائرة المثلثية (C) في النقطتين M و M' نعلم أن $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$

و بالتالي $-\frac{\pi}{4}$ أفصول منحنى للنقطة M

وبما أن $\tan(x + k\pi) = \tan x$ $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ فان $S = \left\{\frac{-\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

خاصية

$\tan x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$ حيث α حل للمعادلة $\tan x = a$ في $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

تمرين حل المعادلتين

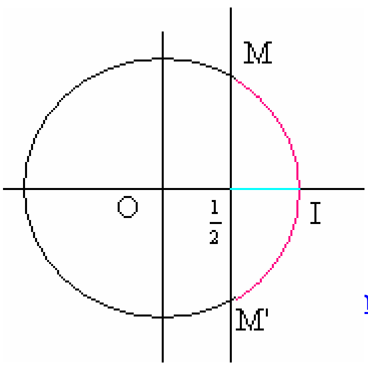
$$\tan 2x = \sqrt{3} \qquad x \in [0;3\pi]$$

$$\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan x \qquad x \in \mathbb{R}$$

II- المتراجحات المثلثة

مثال1

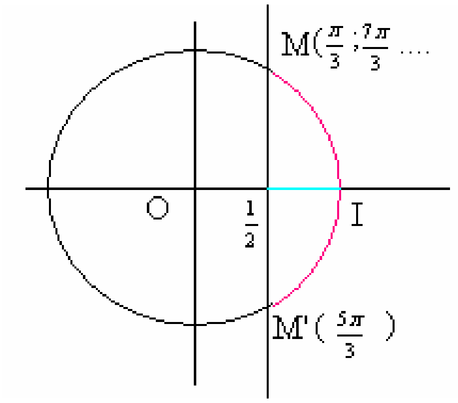
حل $\cos x \geq \frac{1}{2} \qquad x \in]-\pi;\pi]$



نعلم أن $x = -\frac{\pi}{3} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \quad x \in \left]-\pi;\pi\right]$

لتكن $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $M'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ نقطتين من الدائرة المثلثية

مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة الأفاصيل المنحنية للنقط (C) التي تنتمي الى القوس



$\left[\widehat{M'IM}\right]$ في $\left]-\pi;\pi\right]$ وهذه المجموعة هي $S = \left[\frac{-\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$

مثال 2 حل $\cos x \geq \frac{1}{2} \quad x \in \left[0;3\pi\right[$

نعلم أن $x = \frac{5\pi}{3} \quad \vee \quad x = \frac{7\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \quad x \in \left[0;3\right[$

$\frac{\pi}{3}$ و $\frac{7\pi}{3}$ أفصولين منحنيين لنفس النقطة M ،

نعتبر $\frac{5\pi}{3}$ أفصول منحني للنقطة M'

مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة الأفاصيل المنحنية للنقط (C) التي تنتمي الى القوس $\left[\widehat{M'IM}\right]$ في $\left]-\pi;\pi\right]$

وهذه المجموعة هي $S = \left[0;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3};\frac{7\pi}{3}\right]$

تمرين

حل $\sin x \succ \frac{-1}{2} \quad x \in \left]-\pi;\pi\right]$ $\qquad$ $\sin x \succ \frac{-1}{2} \quad x \in \left]0;4\pi\right]$

$\tan x \prec 1 \quad x \in \left[0;2\pi\right]$

متراجحات تؤول في حلها الى متراجحات أساسية

تمرين

حل

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2} \quad x \in \left[-\pi;\pi\right]$$

$$\tan 3x \succ \sqrt{3} \quad x \in \left[0;\pi\right]$$

$$4\cos^2 x - 2\left(1+\sqrt{2}\right)\cos x + \sqrt{2} \leq 0 \quad x \in \left]-\pi;\pi\right]$$

$$\frac{1+\tan x}{\sin 2x} \geq 0 \quad x \in \left]-\pi;\pi\right]$$