تحليلية الجداء السلمي وتطبيقاته

I- الجداء السلمي (تذكير و إضافات)

1- أنشطة

1- نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم متعامد ممنظم النقط $A(1;-2)$; $B(3;2)$; $C(-1;-3)$

أحسب AB ; $\|3\overrightarrow{AC}\|$; $\|-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\|$

2- نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم متعامد ممنظم المستقيمين

$(D):\ x+2y-4=0$; $(\Delta):\ 2x-y-3=0$

أ- حدد إحداثيتي النقطة A ، تقاطع (D) و (Δ)

ب- تأكد أن $B(-2;3)\in(D)$ و $C(1;-1)\in(\Delta)$

قارن AB^2+AC^2 و BC^2

أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

ماذا تستنتج

3- A و B نقطتان مختلفان من المستوى (P)، α قياس الزاوية $[\widehat{AOB}]$ و $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$; $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$

a) أحسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ في الحالتين التاليتين

$\|\vec{u}\|=6$; $\|\vec{v}\|=5$; $\alpha=\frac{\pi}{3}$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{3}$; $\|\vec{v}\|=5$; $\alpha=\frac{5\pi}{6}$

b) حدد α في الحالتين التاليتين

$\|\vec{u}\|=3$; $\|\vec{v}\|=4$; $\vec{u}\cdot\vec{v}=6\sqrt{2}$

$\|\vec{u}\|=3$; $\|\vec{v}\|=4$; $\vec{u}\cdot\vec{v}=-6$

4- لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين حيث $\vec{u}^2=3$; $\vec{v}^2=5$ و $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2$

أحسب $(3\vec{u}-\vec{v})\cdot(2\vec{u}+\vec{v})$

2- تعاريف

أ- الجداء السلمي لمتجهتين

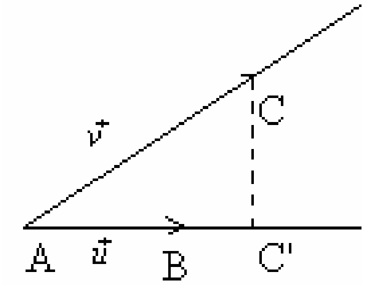
a) تعريف

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين . نعتبر A و B و C ثلاث نقط من المستوى حيث

$\overrightarrow{AB}=\vec{u}$; $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ و C' المسقط العمودي لـ C على (AB)

الجداء السلمي للمتجهتين الغير المنعدمتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}\cdot\vec{v}$ بحيث

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AC'}$



b) لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين و θ القياس الرئيسي للزاوية $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ و O نقطة من المستوى ، توجد نقطتان وحيدتان حيث $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$; $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$

بما أن $-\pi \prec \theta \leq \pi$ فان $|\theta|$ هو قياس للزاوية الهندسية $\left[\widehat{AOB}\right]$

ومنه $\vec{u}\cdot\vec{v} = OA \times OB \cos\left[\widehat{AOB}\right]$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos|\theta|$

إذن $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$ لأن $\cos\theta = \cos(-\theta)$

ليكن α قياس للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$

ومنه $[2\pi]$ $\theta \equiv \alpha$ و بالتالي $\cos\theta = \cos\alpha$

إذن $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$

تعريف

الجداء السلمي للمتجهتين الغير المنعدمتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}\cdot\vec{v}$ بحيث $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$

α قياس للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$.

ملاحظة

*- إذا كانت $\vec{u}$ أو $\vec{v}$ منعدمة فان $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

*- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير منعدمتين فان $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

تمرين أحسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ حيث $\dfrac{-89\pi}{6}$ أحد قياسات الزاوية الموجهة $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ و $\|\vec{u}\| = 3 \quad ; \quad \|\vec{v}\| = 4$

ب – خاصيات

مهما كانت المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ و العدد الحقيقي α

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$$
$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$$
$$\vec{w}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{w}\cdot\vec{u} + \vec{w}\cdot\vec{v}$$
$$(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

ج- تعامد متجهتين

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

II- صيغ تحليلية

1- الصيغة التحليلية للجداء السلمي

خاصية

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

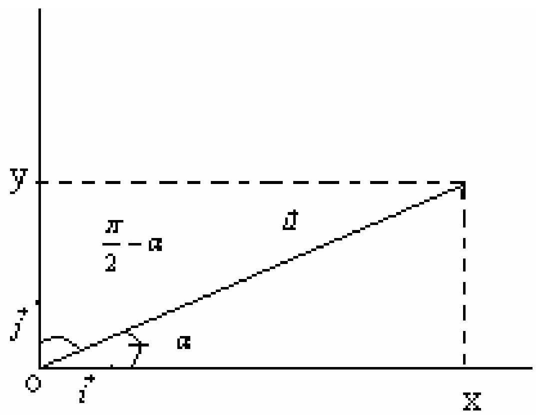
إذا كانت $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

ملاحظة إذا كان $\vec{u}(x;y)$ بالنسبة لأساس متعامد ممنظم $(\vec{i};\vec{j})$ فان $\vec{u}\cdot\vec{i} = x \quad ; \quad \vec{u}\cdot\vec{j} = y$

أمثلة أحسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ في الحالات.................

2- إحداثيتا متجهة في أساس متعامد ممنظم مباشر

ليكن $\vec{u}(x;y)$ بالنسبة لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(o;\vec{i};\vec{j})$ و α قياس $\left(\widehat{\vec{i};\vec{u}}\right)$



لدينا $x=\vec{u}\cdot\vec{i}$; $y=\vec{u}\cdot\vec{j}$

ومنه $x=\|\vec{u}\|\|\vec{i}\|\cos\alpha$ $\qquad$ $y=\|\vec{u}\|\|\vec{j}\|\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$

إذن $x=\|\vec{u}\|\cos\alpha$ $\qquad$ $y=\|\vec{u}\|\sin\alpha$

خاصية

إذا كان $(x;y)$ زوج إحداثيتي متجهة غير منعدمة $\vec{u}$ بالنسبة لأساس متعامد ممنظم مباشر $(\vec{i};\vec{j})$ و α قياس $(\widehat{\vec{i};\vec{u}})$ فان $\vec{u}=\|\vec{u}\|(\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j})$

حالة خاصة

إذا كانت $\vec{u}$ متجهة واحدية (أي $\|\vec{u}\|=1$) فان $\vec{u}=\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j}$

3- الصيغة التحليلية لمنظم متجهة و لمسافة نقطتين

* إذا كان $(x;y)$ زوج إحداثيتي $\vec{u}$ بالنسبة لأساس متعامد ممنظم $(\vec{i};\vec{j})$ فان $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

* إذا كان $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ بالنسبة لمعلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ فان

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

4- الشرط التحليلي لتعامد متجهتين

خاصية

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان حيث $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$

$$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$$

تمرين

حدد المتجهات الواحدية و المتعامدة مع $\vec{u}(-1;2)$

$$\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{v}\\ \|\vec{v}\|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+2y=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}\ldots\ldots\ldots$$

تمرين نعتبر $A(1;3)$ $B(3;1)$ $C(-3;-1)$

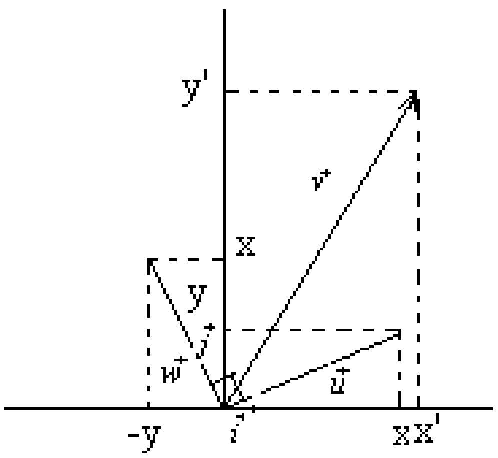
بين أن ABC قائم الزاوية في A

5- حساب $\cos\theta$ و $\sin\theta$

* المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

إذا كانت $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ وθ قياس $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ فان $\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$

* نعتبر المتجهة $\vec{w}$ بحيث $\overline{(\vec{u};\vec{w})}=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ $\quad$ $\|\vec{u}\|=\|\vec{w}\|$



لدينا باستعمال علاقة شال $\overline{(\vec{u};\vec{v})}$ $-\overline{(\vec{u};\vec{w})} = \overline{(\vec{v};\vec{w})}$

$\overline{(\vec{v};\vec{w})} = \frac{\pi}{2} - \theta$

نعلم أن $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$\sin\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|\|\vec{v}\|}$

لدينا $\vec{v}\cdot\vec{w} = xy' - yx' = \det(\vec{u};\vec{v})$

إذن $\sin\theta = \frac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{xy' - x'y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$

تمرين

ليكن θ القياس الرئيسي للزاوية $\widehat{(\vec{u};\vec{v})}$ حيث $\vec{u}\left(-\sqrt{3};-3\right)$ و $\vec{v}\left(-1;\sqrt{3}\right)$. حدد θ.

III- معادلة مستقيم معرف بمتجهة منظمية

1- متجهة منظمية

تعريف (D) مستقيم في المستوى، كل متجهة غير منعدمة عمودية على متجهة موجهة للمستقيم (D) تسمى متجهة منظمية على المستقيم (D).

2- خاصيات

* إذا كانت $\vec{n}$ منظمية على (D) فان كل متجهة $k\vec{n}$ ، $\left(k \in \mathbb{R}^*\right)$ منظمية عليه.
* إذا كانت $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ متجهتين منظميتين على مستقيم (D) فانهما تكونان مستقيميتين .
* اذا كانت $\vec{u}(a;b)$ موجهة لـ (D) فان المتجهة $\vec{n}(-b;a)$ منظمية عليه.

2- معادلة مستقيم معرف بنقطة ومتجهة منظمية عليه

$\vec{n}(a;b)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_0;y_0)$ نقطة من المستوى لتكن M نقطة

$\overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}(-b;a)$ مستقيميتان

$\Leftrightarrow$ M تنتمي إلى المستقيم المار من A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}(-b;a)$.

إذن مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$ هي المستقيم المار من A و الموجه ب $\vec{u}(-b;a)$

معادلته ستكون على شكل $ax + by + c = 0$

خاصية

لتكن $\vec{n}(a;b)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_0;y_0)$ نقطة من المستوى.

مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$ هي المستقيم المار من A و الموجه ب $\vec{u}(-b;a)$

خاصية

إذا كانت $\vec{n}(a;b)$ منظمية على (D) فان معادلة (D) على شكل $ax + by + c = 0$

إذا كان $(D):\ ax + by + c = 0$ فان $\vec{n}(a;b)$ منظمية على (D)

تمرين

1- حدد متجهة منظمية لكل مستقيم من المستقيمات التالية

$(D_1)\,3x - 2y + 1 = 0 \quad ; \quad (D_2): 2y - 1 = 0$

$(D_3): x - 3 = 0$

2- حدد المستقيم المار من $A(-1;3)$ و $\vec{n}(4;3)$ منظمية عليه

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر $A(2;1)$ و $B(0;1)$ و $C(-2;3)$ و $\vec{u}(-2;5)$

1- حدد معادلة للمستقيم (D) المار من A و $\vec{u}$ منظمية عليه

2- أ) حدد معادلة ديكارتية لواسط $[A;B]$

ب) حدد Ω تقاطع واسطات المثلث ABC

3- حدد معادلة ديكارتية للارتفاع المار من A

3- شرط تعامد مستقيمين

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم م.م نعتبر

$(D'): a'x + b'y + c' = 0$ $\quad (D): ax + by + c = 0$ حيث $(a';b') \neq (0;0)$; $(a;b) \neq (0;0)$

$$(D) \perp (D') \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$$

نتيجة

$(D'): y = m'x + p'$ $\quad (D): y = mx + p$

$$(D) \perp (D') \Leftrightarrow mm' = -1$$

4- مسافة نقطة عن مستقيم

نشاط

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$. (D) المستقبم المار من $B(x_B;y_B)$ و $\vec{n}(a;b)$ منظمية عليه. لتكن $A(x_0;y_0)$ نقطة من المستوى ، H المسقط العمودي للنقطة A على (D).

أ- أحسب $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}$ بدلالة $\overrightarrow{HA}$ و $\vec{n}$

ب- أثبت أن $HA = \dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}|}{\|\vec{n}\|}$

د- ليكن $(D): ax + by + c = 0$ حيث $(a;b) \neq (0;0)$

بين أن $HA = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

خاصية

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

ليكن $(D): ax + by + c = 0$ حيث $(a;b) \neq (0;0)$ و $A(x_0;y_0)$ نقطة من المستوى

مسافة النقطة A عن المستقيم (D) هي $d(A;(D)) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

تمرين

$(D): 3x - 4y + 1 = 0$; $A(-2;3)$

حدد $d(A;(D))$

تمرين

أحسب احداثيتي النقطة H المسقط العمودي للنقطة $A(-3;5)$ على المستقيم $(D): x - 2y + 8 = 0$